|  |  |
| --- | --- |
| Gerb-BMSTU_01 | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **имени Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

**ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ**

по дисциплине: «Вычислительная математика»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент |  | Сергеева Диана Константиновна |
| Группа |  | РК6-56Б |
| Тип задания |  | лабораторная работа |
| Тема лабораторной работы |  | Модель биологического нейрона |

Студент **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_Сергеева Д.К.\_\_**

*подпись, дата фамилия, и.о.*

Преподаватель **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_Соколов А.П. \_\_**

*подпись, дата фамилия, и.о.*

*Москва, 2021 г.*

Оглавление

[Задание на лабораторную работу 3](#_Toc88428921)

[Цель выполнения лабораторной работы 4](#_Toc88428922)

[Выполненные задачи 4](#_Toc88428923)

[1. Разработана функция для нахождения дискретной траектории с помощью метода Эйлера 5](#_Toc88428924)

[2. Разработана функция для нахождения дискретной траектории с помощью неявного метода Эйлера 5](#_Toc88428925)

[3. Разработана функция для нахождения дискретной траектории с помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка 6](#_Toc88428926)

[4. Построен график зависимости потенциала мембраны от времени для каждого режима работы по трем методам: методу Эйлера, неявному методу Эйлера и методу Рунге-Кутта 4-го порядка 7](#_Toc88428927)

[5. Выведены импульсы всех нейронов, как функция времени 9](#_Toc88428928)

[Заключение 11](#_Toc88428929)

[Список использованных источников 11](#_Toc88428930)

# Задание на лабораторную работу

Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка активно используются далеко за пределами стандартных инженерных задач. Примером области, где подобные численные методы крайне востребованы, является нейробиология, где открытые в XX веке модели биологических нейронов выражаются через дифференциальные уравнения 1-го порядка. Математическая формализация моделей биологических нейронов также привела к появлению наиболее реалистичных архитектур нейронных сетей, известных как спайковые нейронные сети (Spiking Neural Networks). В данной лабораторной работе мы исследуем одну из простейших моделей подобного типа: модель Ижикевича.

Дана система из двух ОДУ 1-го порядка:

*,* (1)

*,* (2)

и дополнительное условие, определяющее возникновение импульса в нейроне:

если , то , (3)

где *v* – потенциал мембраны (мВ), *u* – переменная восстановления мембраны (мВ), *t* – время (мс), *I* – внешний ток, приходящий через синапс в нейрон от всех нейронов, с которыми он связан. Данная система имеет параметры *a* (задает временной масштаб для восстановления мембраны; чем больше *a*, тем быстрее происходит восстановление после импульса), *b* (чувствительность переменной восстановления к флуктуациям разности потенциалов), *c* (значение потенциала мембраны сразу после импульса) и *d* (значение переменной восстановления мембраны сразу после импульса).

Таблица 1

Характерные режимы заданной динамической системы и соответствующие значения её параметров

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Режим | a | b | c | d |
| Tonic spiking (TS) | 0.02 | 0.2 | -65 | 6 |
| Phasic spiking (PS) | 0.02 | 0.25 | -65 | 6 |
| Chattering (C) | 0.02 | 0.2 | -50 | 2 |
| Fast spiking (FS) | 0.1 | 0.2 | -65 | 2 |

Требуется (базовая часть):

1. Написать следующие функции, каждая из которых возвращает дискретную траекторию системы ОДУ с правой частью для заданной функции *f*, начальным условием *x\_0*, шагом по времени *h* и конечным временем *t\_n*:

* *euler(x\_0, t\_n, f, h)*, где дискретная траектория строится с помощью метода Эйлера;
* *implicit\_euler(x\_0, t\_n, f, h),* где дискретная траектория строится с помощью неявного метода Эйлера;
* *runge\_kutta(x\_0, t\_n, f, h)*, где дискретная траектория строится с помощью метода Рунге–Кутта 4-го порядка;

1. Для каждого из реализованных методов численно найти траектории заданной динамической системы, используя шаг и характерные режимы, указанные в таблице 1. В качестве начальных условий можно использовать и . Внешний ток принимается равным .
2. Вывести полученные траектории на четырех отдельных графиках как зависимость потенциала мембраны от времени, где каждый график должен соответствовать своему характерному режиму работы нейрона.
3. По полученным графикам кратко описать особенности указанных режимов.

# Цель выполнения лабораторной работы

**Цель выполнения лабораторной работы** – изучение метода Эйлера, неявного метода Эйлера, метода Рунге-Кутта 4-го порядка. Изучение траектории как зависимость потенциала мембраны от времени.

# Выполненные задачи

1. Разработана функция для нахождения дискретной траектории с помощью метода Эйлера.
2. Разработана функция для нахождения дискретной траектории с помощью неявного метода Эйлера.
3. Разработана функция для нахождения дискретной траектории с помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка.
4. Построен график зависимости потенциала мембраны от времени для каждого режима работы по трем методам: методу Эйлера, неявному методу Эйлера и методу Рунге-Кутта 4-го порядка.
5. Выведены импульсы всех нейронов, как функция времени

# Разработана функция для нахождения дискретной траектории с помощью метода Эйлера

Реализована функция *euler(t\_0, t\_n, f, h, mode)*, на вход которой подаются начальное и конечное время, заданная функция , шаг и параметры для определенного режима динамической системы.

Из курса лекций известно, что если есть ОДУ , то обобщенная формулировка метода Эйлера имеет вид:

,

, (4)

где и ; , , где . Ожидается, что .

Для начала находим количество точек как: . Начальные условия задаются согласно заданию: и . Находим новые значения по выражению (4), где является правой частью уравнений (1) и (2). При этом проверяем каждый раз, что значение меньше 30, в противном случае накладываем условия (3).

# Разработана функция для нахождения дискретной траектории с помощью неявного метода Эйлера

Реализована функция *implicit\_euler(t\_0, t\_n, f, h, mode)*, на вход которой подаются начальное и конечное время, заданная функция , шаг и параметры для определенного режима динамической системы.

Для нахождения значений функции необходимо решить нелинейное уравнение:

, (5)

где и ; , , где . Ожидается, что . Количество точек находим как: . Начальные условия задаются согласно заданию: и .

Воспользуемся функцией *scipy.optimize.fsolve(func, x0, arg)*, которая решает уравнение в точке . В нашем случае требуется решить выражение (5) , которую мы передаём как . – точка относительно которой нужно решить уравнение (5), равняется текущему значению или , которые необходимо найти. Дополнительными аргументами передаём шаг , функцию и текщие и . Функция в выражении (5) является правой частью уравнений (1) и (2). При этом проверяем каждый раз, что значение меньше 30, в противном случае накладываем условия (3).

# Разработана функция для нахождения дискретной траектории с помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка

Реализована функция *runge\_kutta(t\_0, t\_n, f, h, mode)*, на вход которой подаются начальное и конечное время, заданная функция , шаг и параметры для определенного режима динамической системы.

Из курса лекций известно, что обобщенная формулировка метода Рунге-Кутта 4-го порядка для систем ОДУ имеет вид:

,

, (6)

, (7)

, (8)

, (9)

, (10)

где ; и ; , , где .

Количество точек находим как: . Начальные условия задаются согласно заданию: и . Значения находим по выражению (10), при этом пересчитывая для каждого нового значения коэффициенты по формулам (6-9) соответственно. Функция в выражениях (6-9) является правой частью уравнений (1) и (2) для и соответственно. При этом проверяем каждый раз, что значение меньше 30, в противном случае накладываем условия (3).

# Построен график зависимости потенциала мембраны от времени для каждого режима работы по трем методам: методу Эйлера, неявному методу Эйлера и методу Рунге-Кутта 4-го порядка

Построены зависимости потенциала мембраны от времени по 3 методам для каждого из 4 режимов: tonic spiking (рис. 1), phasic spiking (рис. 2), chattering (рис. 3) и fast spiking (рис. 4). Для построения использованы метод Эйлера, неявный метод Эйлера и метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

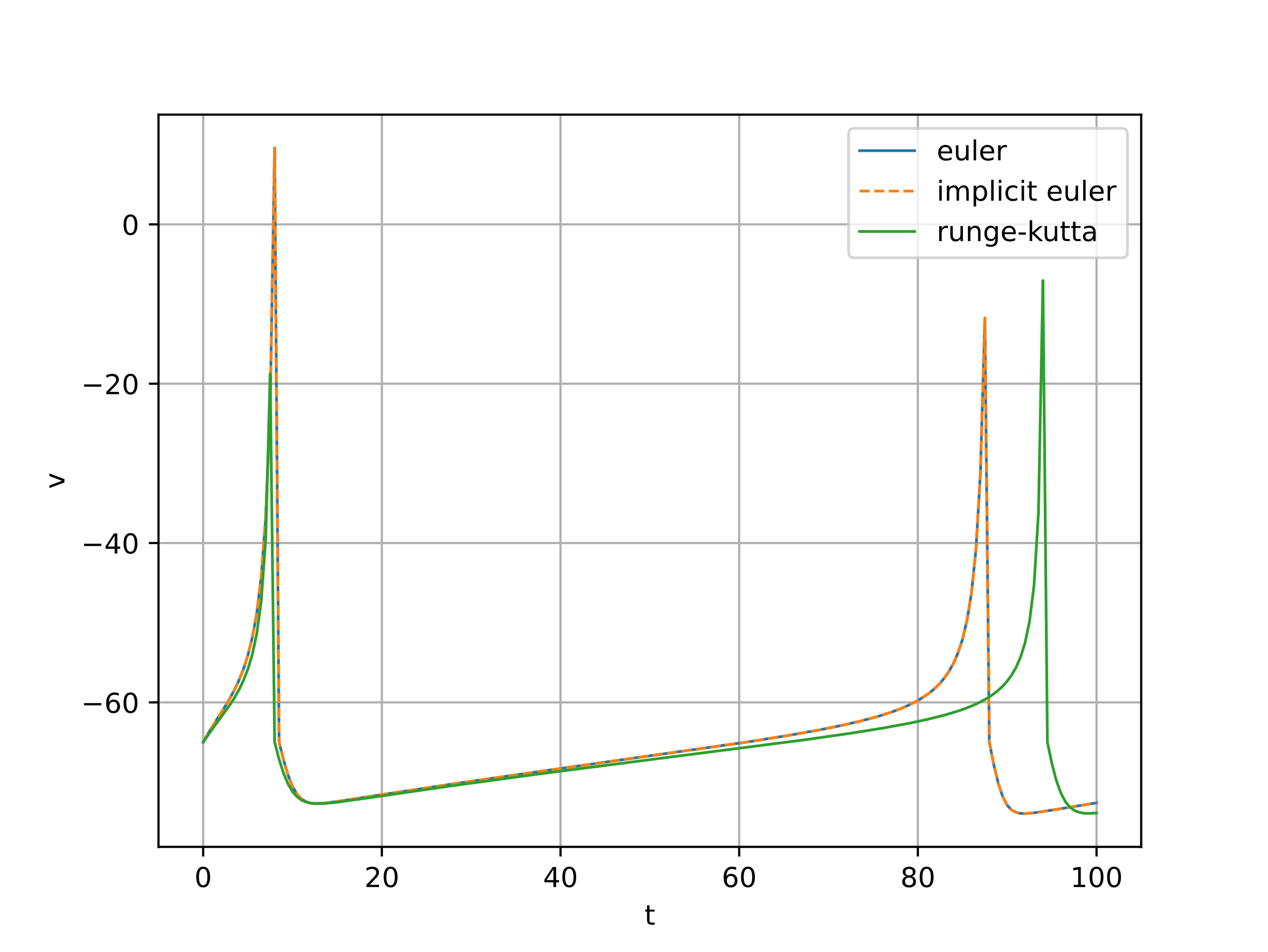


Рис. 1 – Зависимость потенциала мембраны от времени, построенная по 3 методам, для режима tonic spiking

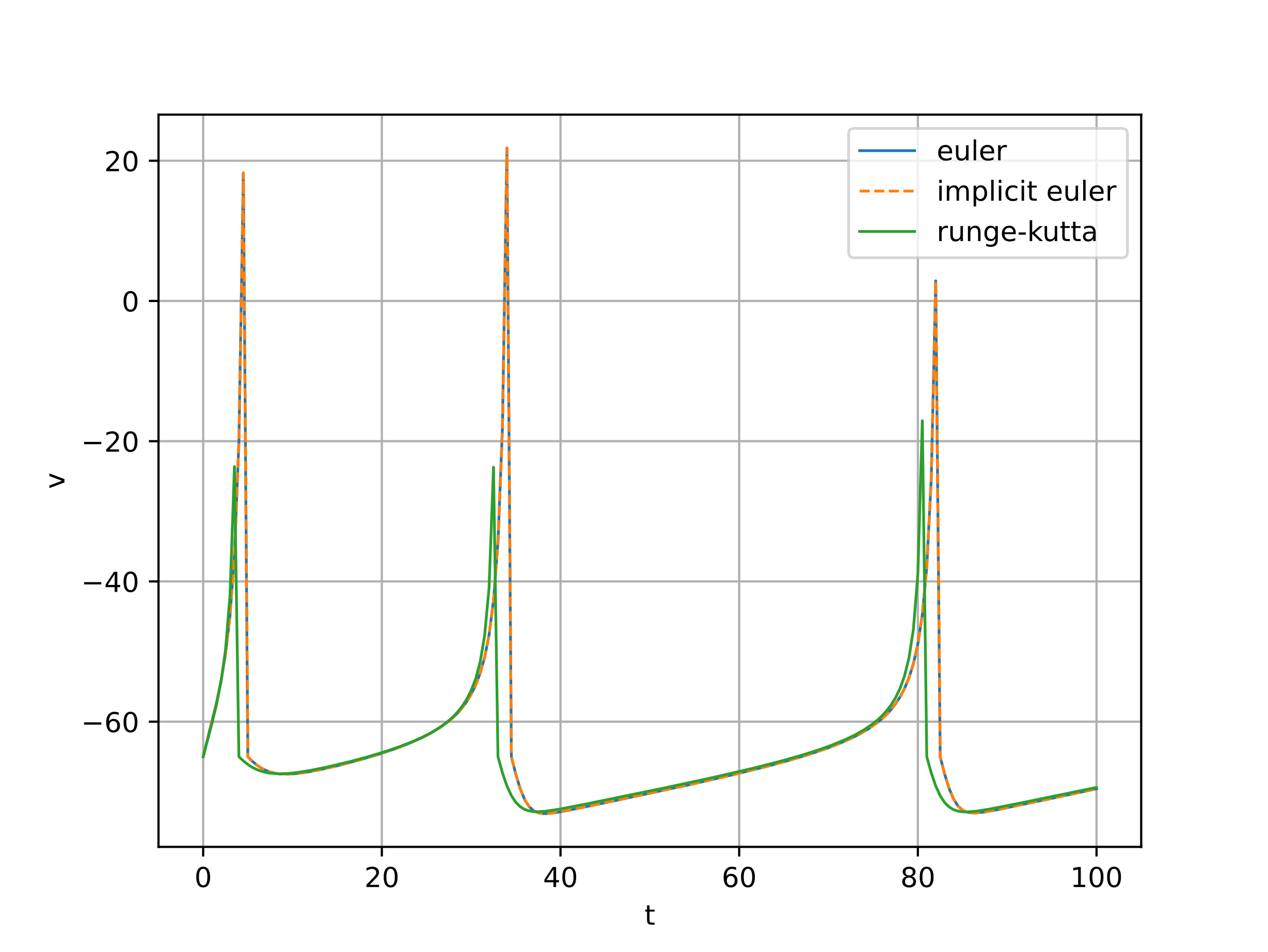


Рис. 2 – Зависимость потенциала мембраны от времени, построенная по 3 методам, для режима phasic spiking

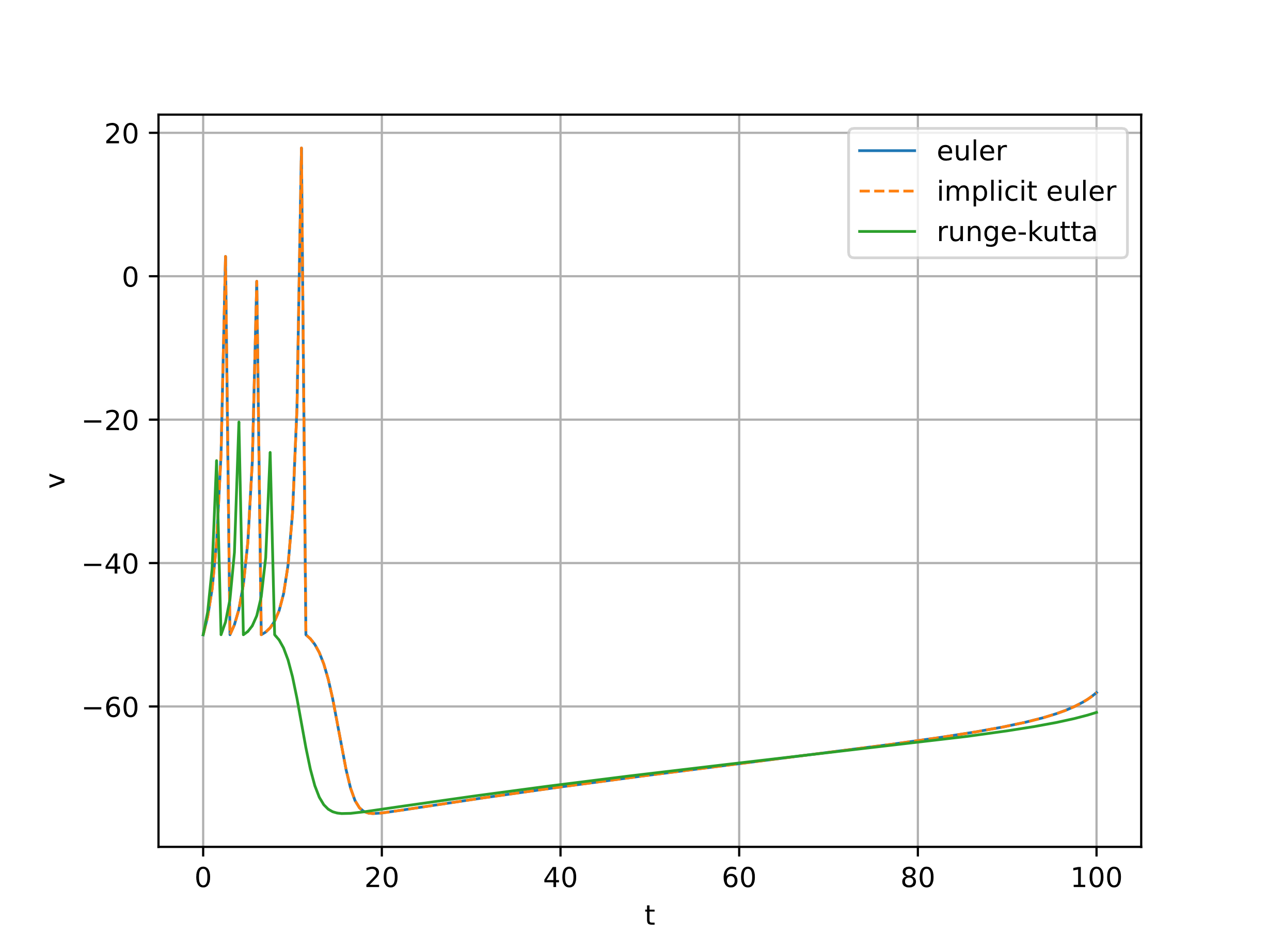


Рис. 3 – Зависимость потенциала мембраны от времени, построенная по 3 методам, для режима chattering

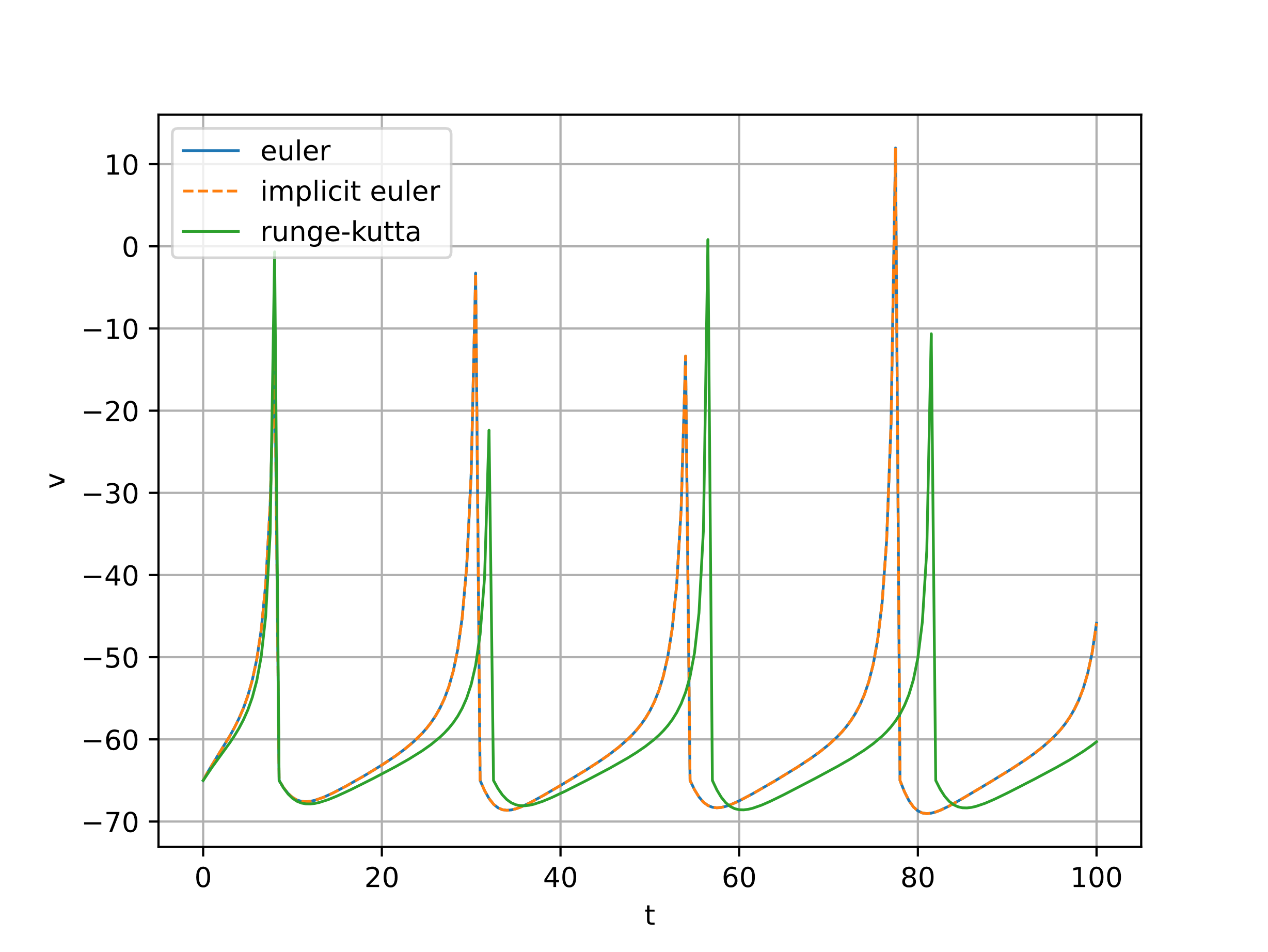


Рис. 4 – Зависимость потенциала мембраны от времени, построенная по 3 методам, для режима fast spiking

По полученным графикам видно, что возрастание потенциала мембраны самое быстрое и частое происходит для режима fast spiking. Для режима chattering в определенный момент времени возрастание потенциала мембраны происходит очень медленно. Чуть медленнее происходит возрастание мембраны для режима tonic spiking в отличие от phasic spiking и fast spiking.

Метод Эйлера и метод Рунге-Кутта решают ОДУ. Для решения неявным методом Эйлера необходимо решить нелинейное уравнение.

# Выведены импульсы всех нейронов, как функция времени

Воссоздадим нейронную сеть с 800 возбуждающими нейронами и 200 тормозящими нейронами. Для возбуждающих нейронов заданы параметры:

,

,

,

,

,

где – случайные числа от 0 до 1. Для тормозных нейронов заданы другие параметры:

,

,

,

,

,

где – случайные числа от 0 до 1. Начальные условия задаются согласно заданию: , .

Сама сеть смоделирована как полный граф , описывающий значения токов, передаваемых от нейрона к нейрону. Значения , если нейрон – возбуждающий, и , если нейрон – тормозящий. и случайные число от 0 до 1.

Проходимся по значениям нейронов в каждый момент времени. Если значение нейрона больше или равен 30, то возникает импульс. То есть при возникновении импульса нейрона внешний ток связанного с ним нейрона одновременно увеличивается на , а затем падает до 0. При каждом возникновении импульса, запоминаем нейрон для того, чтобы построить функцию времени в итоге. Новые значения высчитываются для и по формулам (1) и (2).

Выведем импульсы всех нейронов как функцию времени (рис. 5).

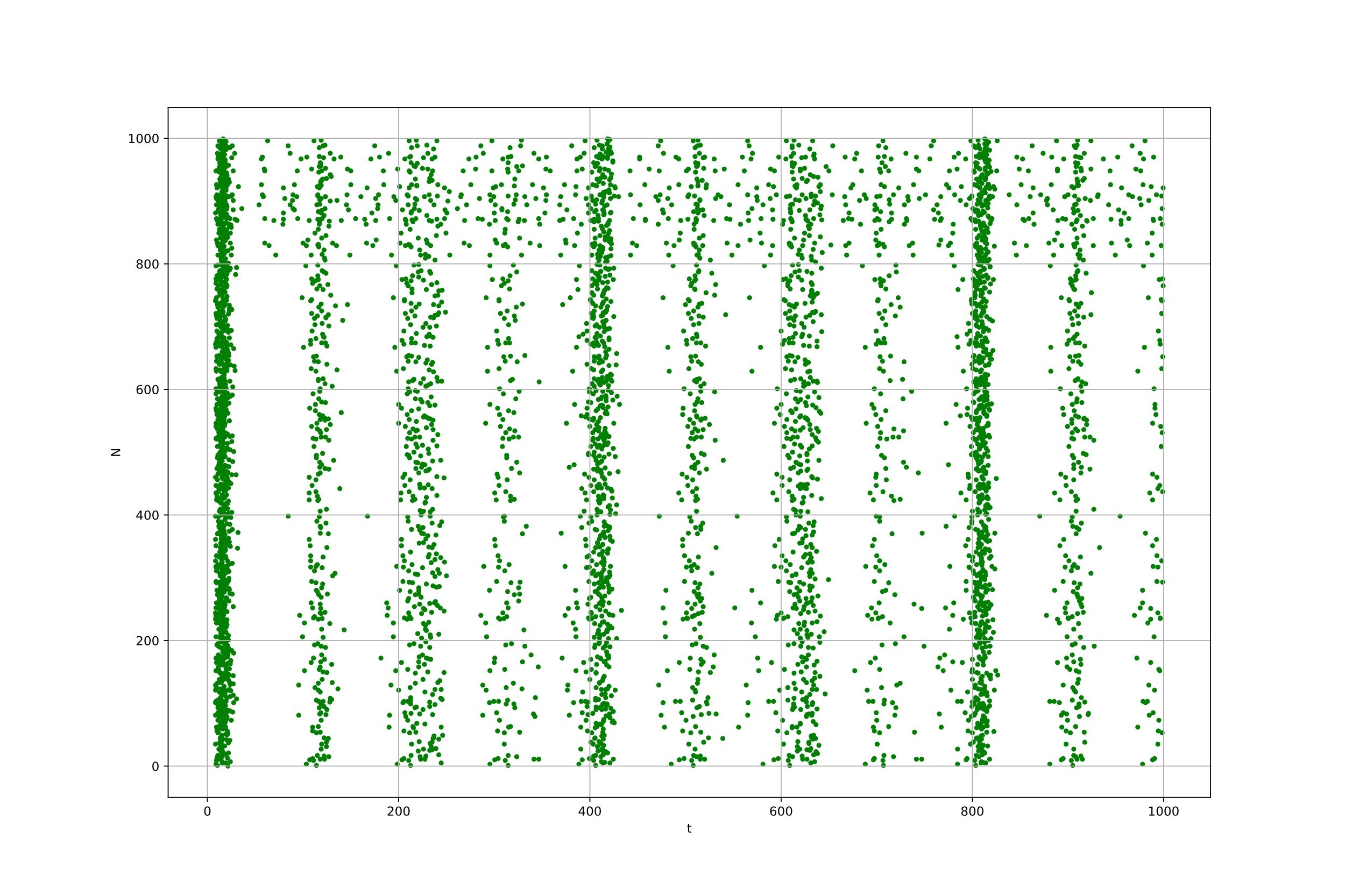


Рис. 5 – Импульсы всех нейронов как функция времени

# Заключение

По результатам лабораторной работы мы научились применять метод Эйлера, неявный метод Эйлера, метод Рунге-Кутта. Научились строить графики для зависимости потенциала мембраны от времени для четырёх режимов. Смоделировали нейронную сеть, вывели импульс нейронов как функцию времени.

# Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика. Москва, 2018-2021, С. 140.